

# KL展開による応答スペクトルのモード解析 Modal Analysis of Response Spectra Using KL Expansion

○能島 暢呂<sup>1</sup>, 久世益充<sup>2</sup>  
Nobuoto NOJIMA and Masumitsu KUSE

<sup>1</sup>岐阜大学工学部 社会基盤工学科  
Department of Civil Engineering, Gifu University  
<sup>2</sup>岐阜大学流域圏科学研究センター  
River Basin Research Center, Gifu University

A method for mode decomposition and synthesis of velocity response spectra has been proposed using Karhunen-Loève (KL) expansion. Eigenvalues and eigenvectors are solved for correlation matrix of the 101-dimensional feature vectors calculated using a number of accelerograms. Next, the feature vectors are transformed to principal components using the orthogonal matrix composed of the eigenvectors. Several principal components are adopted to recompose the original response spectra without much loss of information. Illustrative examples for acceleration records observed in the 2011 Off the Pacific Coast of Tohoku Earthquake, Japan are shown. Six to twelve dimensional representation can be achieved by using the orthonormal basis extracted by the KL expansion.

**Keywords** : Velocity response spectra, feature vector, Karhunen-Loève expansion, mode decomposition and synthesis, dimension reduction

## 1. はじめに

応答スペクトルは、地震動の振幅特性と周期特性を同時に表現できる地震動強度指標である。筆者らは地震動の経時特性の特徴量として、Husid plot (正規化加速度累積パワー曲線) のパーセンタイル値に基づく 98 次元の特徴ベクトルを提案し<sup>1)</sup>、KL 展開<sup>2)</sup>を用いたモード解析により特徴空間の部分空間を定義して、情報損失の少ない次元縮約方法を提案した<sup>3)</sup>。本研究では同様の手法を速度応答スペクトルに応用し、モード解析を行うものである。

## 2. 応答スペクトルの特徴ベクトルと KL 展開

応答スペクトルの特徴抽出について説明する。本研究では 5%減衰の速度応答スペクトルを対象とし、周期  $T=0.1\sim 10s$  の区間を対数軸上で 100 等分した 101 点の周期を用いる。

$$T_i = 0.1 \times 10^{\left(\frac{2}{100}\right)(i-1)} \quad (1)$$

各周期における速度応答スペクトルを  $S_i(T_i)$  として、その常用対数  $x_i = \log S_i(T_i)$  ( $i=1, \dots, 101$ ) を要素とする 101 次元の列ベクトルを特徴ベクトル  $\mathbf{x}=(x_1, \dots, x_{101})^T$  とする。

経時特性を対象とした文献<sup>1)</sup>では分散共分散行列を用いたが、本研究では相関行列による分析を行うこととする。多数の特徴ベクトル  $\mathbf{x}$  の各要素を平均値  $0$ 、標準偏差  $1$  になるように正規化した  $\mathbf{x}_0$  から算出される相関行列  $\mathbf{R}$  は、半正値対称行列であり、固有値  $\lambda_i$  が大きい順に対角要素に並んだ行列  $\mathbf{\Lambda}$  に対角化される。

$$\mathbf{R} = E \left[ \mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^T \right], \quad \mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{R} \mathbf{\Phi} \quad (2)$$

ここに、行列  $\mathbf{\Phi}$  は各固有値に対する固有ベクトルからなり、正規直交基底を構成する。KL(Karhunen-Loève)展開<sup>3)</sup>を適用すると、この基底変換により  $\mathbf{x}_0$  は主成分得点  $\mathbf{z}_0=(z_{01}, \dots, z_{098})^T$  に変換される。主成分得点  $\mathbf{z}_0$  は無相関で相関行列は  $\mathbf{\Lambda}$  となる。同じ基底変換により特徴ベクトル  $\mathbf{x}$  は主成分得点  $\mathbf{z}=(z_1, \dots, z_{98})^T$  に変換される。その逆変換により  $\mathbf{z}$  から  $\mathbf{x}$  を復元する場合、寄与率の高い上位次数の部分空間でも良い近似が得られる。

$$\mathbf{z} = \mathbf{\Phi}^T \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = (\mathbf{\Phi}^T)^{-1} \mathbf{z} = \mathbf{\Phi} \mathbf{z} \quad (3)$$

## 3. 数値計算例

2011 年東北地方太平洋沖地震( $M_w=9.0$ )において、防災科学技術研究所の K-NET<sup>4)</sup>による 691 地点<sup>1)</sup>の加速度記録(EW 成分)を用いた数値計算例を示す。

### (1) 固有ベクトルと寄与率

図 1 に固有ベクトルを示す。1 次モードの要素はすべて正で、全周期帯にわたってフラットな特性を示しており、スペクトル形状というよりも、むしろ全体的な振幅レベルを表現するモードと考えられる。2 次モードについては、周期 3.8s ( $i=80$ )付近にピークがあり、卓越周期が短周期側か長周期側のいずれにあるかを決定付ける。3 次モードは周期 1.05s ( $i=52$ )付近にピークがあり、中間的な周期帯の卓越度合いを表す。一般に高次モードになるほど徐々に複雑な形状を反映したモードとなるが、それぞれが強調する周期帯は比較的明確に表れている。

図 2 に主成分の固有値 (分散) を示す。寄与率は第 1~3 主成分でそれぞれ 89.8%, 6.0%, 1.6%であり、第 3 主成分までの累積寄与率は 97.4%に達し大局的な特徴が反映されている。さらに第 4~6 主成分まででそれぞれ 98.1%, 98.5%, 98.4%である。第 7~10 成分までで 98.88%,

99.04%, 99.15%, 99.25%である。一方、同じ波形のデータセットを用いて継続時間のモード解析を行ったところ、累積寄与率は第3主成分までで98.3%、第6主成分までで99.5%であった<sup>1)</sup>。応答スペクトルの方がやや高次の項まで値を持つことがわかる。継続時間の特徴ベクトルは、要素番号に対して単調増加であるのに対して、5%減衰の応答スペクトルは、増減が激しい場合もあることに起因すると考えられる。高減衰（例えば20%減衰）とすれば、高次モードの寄与は小さくなると考えられる。

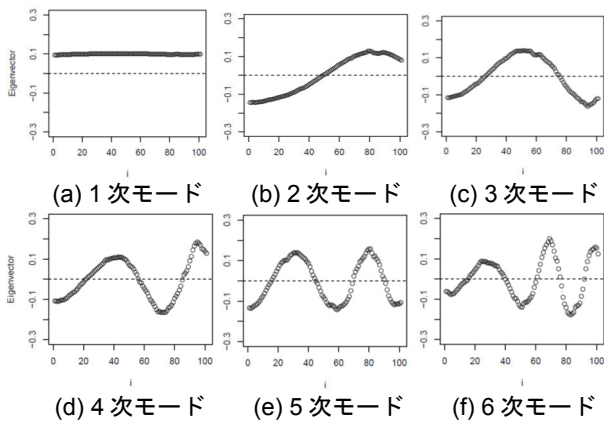


図1 固有ベクトル

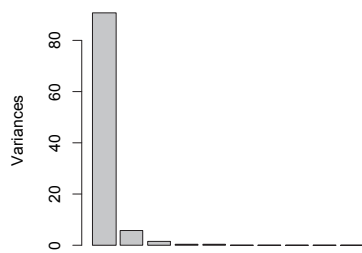
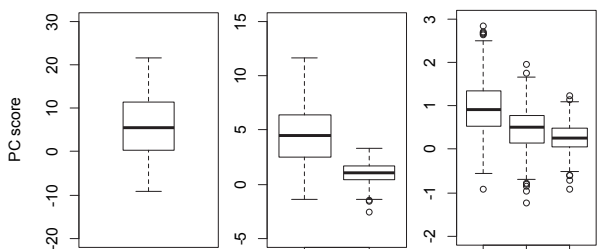


図2 第1~10主成分の固有値（分散）

### (2) 主成分得点の分布性状と二次元布置

図3は対象とした全波形の主成分得点  $z$  の箱ひげ図である。全体的にみると、1次モードは正が多く値の幅が広い。2次モードはほとんど正でやや絶対値が大きい。3次モードもほとんど負であるが絶対値は大きくない。4~6次モードは正が優勢で絶対値はかなり小さい。



(a) 1次モード (b) 2~3次モード (c) 4~6次モード  
図3 主成分得点の箱ひげ図 (691 記録)

### (3) 特徴ベクトルのモード分解と再合成

図4に示す3地点での加速度波形を対象とした結果を示す。最大加速度はそれぞれ(a)35.5cm/s<sup>2</sup>, (b)462.7cm/s<sup>2</sup>, (c)1268.5cm/s<sup>2</sup>である。

図5は主成分得点  $z$  で、いずれも1次モードが卓越し、全体的な振幅の大きさを表す。(a)では2次モードもかな

り大きく、逆に(b)および(c)では2次以上はかなり小さくなっている。図6は1, 3, 6, 9, 12次までのモードを順次合成して特徴ベクトルを復元した過程を示し、元の101次元特徴ベクトルと比較したものである。(a)および(b)においては6次程度のモードまでの合成で、元の応答スペクトルが概ね復元されていることがわかる。一方、(c)においては6次では不十分であり、12次でほぼ整合した結果が得られる。細部の変動を詳細に表現するには、一般に高次の情報を要するといえる。

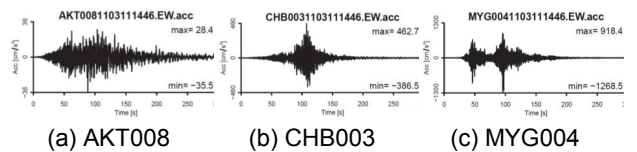
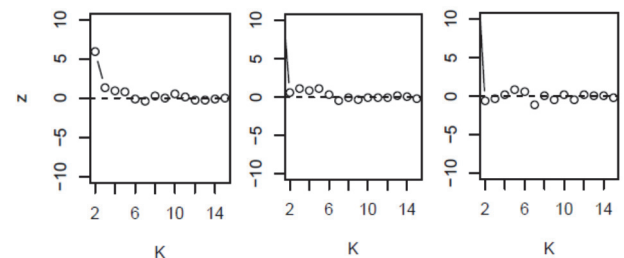
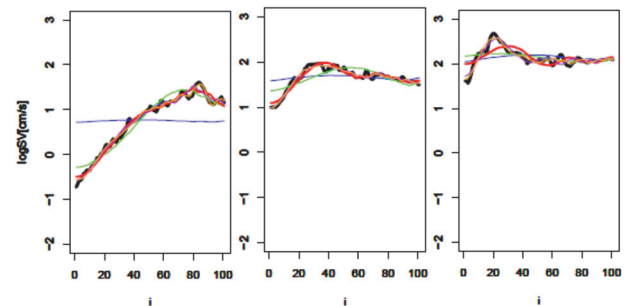


図4 加速度波形



(a) AKT008 (b) CHB003 (c) MYG004  
図5 2~15次モードの主成分得点  
(1次の値は枠外で、それぞれ7.52, 16.66, 21.52)



(a) AKT008 (b) CHB003 (c) MYG004  
図6 モード合成による特徴ベクトルの復元 (黒線: 101次元特徴ベクトル, 青・緑・赤・紫・橙線: 1, 3, 6, 9, 12次までの合成結果)

### 謝辞

本研究では、(国研)防災科学技術研究所 K-NET の強震記録を使用した。記して謝意を表す。

### 参考文献

- 1) 能島暢呂・久世益充・高島拓也：地震動の経時特性の特徴抽出と階層的クラスター分析による分類，日本地震工学会論文集，2017。（登載決定）
- 2) 石井健一郎・前田英作・上田修功・村瀬洋：わかりやすいパターン認識，オーム社，1998，204p.
- 3) 能島暢呂・久世益充：KL展開による地震動の経時特性のモード解析，平成29年度土木学会第72回年次学術講演会，2017.9。（印刷中）
- 4) (国研)防災科学技術研究所：強震観測網(K-NET, KiK-net) <http://www.kyoshin.bosai.go.jp/kyoshin/>
- 5) 中村永友：多次元データ解析法，Rで学ぶデータサイエンス2，共立出版，2009，248p.